

Logaritmo dun número real.

<http://www.recursosmatematicos.com/clase>

Cales son as solucións das seguintes ecuacións?

a) $64=X^6$ Pídese a base e sábese a potencia e o expoñente. $X = \sqrt[6]{64} = 2$.

b) $64= 4^X$ Pídese o expoñente e sábese a base e o valor da potencia. Aínda que non sexamos capaces de resolver esta ecuación, por tanteo, sabemos que $X=3$. Porque $4^3=64$ (A que número temos que elevar 4 para obter 64 como resultado?).

Ó expoñente descoñecido nesta ecuación chámasele logaritmo en base 4 de 64, e escribímolo $X= \log_4 64$

Exemplo.

Se **a** é un número **real positivo e distinto de 1**, o logaritmo en base a dun número **N**, é o expoñente ó que hai que elevar a base para obter ese número.

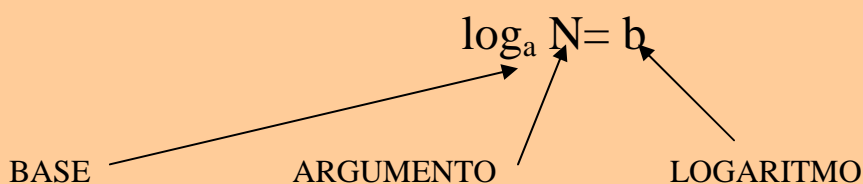
$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$$

$\log_2 2 = x \Leftrightarrow 2^x = 2$, como $x=1$, $\log_2 2=1$

$\log_3 1 = x \Leftrightarrow 3^x = 1$, como $x=0$, $\log_3 1=0$

$\log_5 0.2 = x \Leftrightarrow 5^x = 0.2=1/5$, como $x=-1$, $\log_5 0.2=-1$

$\log_4 -16 = x \Leftrightarrow 4^x = -16$, como non existe un valor de x que verifique a igualdade (non podemos obter un número negativo dunha potencia de base 4), este logaritmo non existe.



Ó número **N**, cuxo logaritmo nunha base **a** é igual a **b**, chámasele **antilogaritmo** de **b** nesa mesma base

Só teñen logaritmo real os números maiores que 0

$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

$\log_e a$ chámase logaritmo neperiano de a e escíbese **$\ln a$** .
 $\log_{10} a$ chámase logaritmo decimal de a e escíbese **$\log a$** .

Exercicio. Aplicando a definición de logaritmo, calcula o valor de x en cada caso.

- a) $\log_{1/2} 8 = x$ b) $\log_x 2 = 4$ c) $\log_3 x = -2$

Propiedades dos logaritmos.

O logaritmo dun produto é igual á suma dos logaritmos dos factores.	$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$
O logaritmo dun cociente é igual á resta dos logaritmos do dividendo e do divisor	$\log_a (M:N) = \log_a M - \log_a N$
O logaritmo dunha potencia é igual ó produto do expoñente polo logaritmo da base.	$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$

Comprobación. (As outras propiedades compróbanse de xeito similar).

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Sexan X e Y os logaritmos nunha certa base de dous números reais M e N . Pola definición de logaritmo,

$$\begin{aligned} x = \log_a M &\Leftrightarrow a^x = M \\ y = \log_a N &\Leftrightarrow a^y = N \end{aligned}$$

Multiplicando entre si as igualdades, obtemos

$$a^x \cdot a^y = M \cdot N \Rightarrow a^{x+y} = M \cdot N \Leftrightarrow \log_a (M \cdot N) = x + y \text{ pola definición de logaritmo.}$$

Sustituindo x , y polo seu valor en función de M e N ,

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Cambio de base.

Exemplo.

Para calcular $\log_3 15$, trátase de escribir este logaritmo en función de logaritmos en base 10.

$$b = \log_3 15 \Leftrightarrow 3^b = 15$$

Calculamos o logaritmo decimal a ambos lados da igualdade e aplicamos as propiedades dos logaritmos.

$$\log 3^b = \log 15 \Rightarrow b \cdot \log 3 = \log 15$$

$$\log_3 15 \cdot \log 3 = \log 15 \Rightarrow \log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3}$$

A relación pódese expresar de forma xeral do seguinte modo.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Calculadora.



Para calcular $\ln 7$, tecleamos $\ln 7 = 1.609437912$

Para calcular $\log 100$ tecleamos $\log 100 = 2$

Para calcular $\log_3 15$ tecleamos $\log \square, 3, \rightarrow, 5, = 1.464973521$

Onde aparecen os logaritmos?

Os decibelios.

Un decibel é a décima parte dun BEL que é a unidade de referencia para medir a potencia ou intensidade dun son. Os logaritmos son moi utilizados porque a sinal en decibelios (dB) pode ser facilmente sumada o restada e tamén por la razón de que o oído humano responde naturalmente a niveis de sinal nunca forma aproximadamente logarítmica.

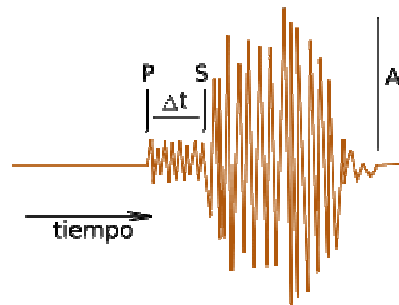
A conversión entre intensidade e decibelios pódese expresar mediante esta fórmula.

$$\mathcal{S} = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

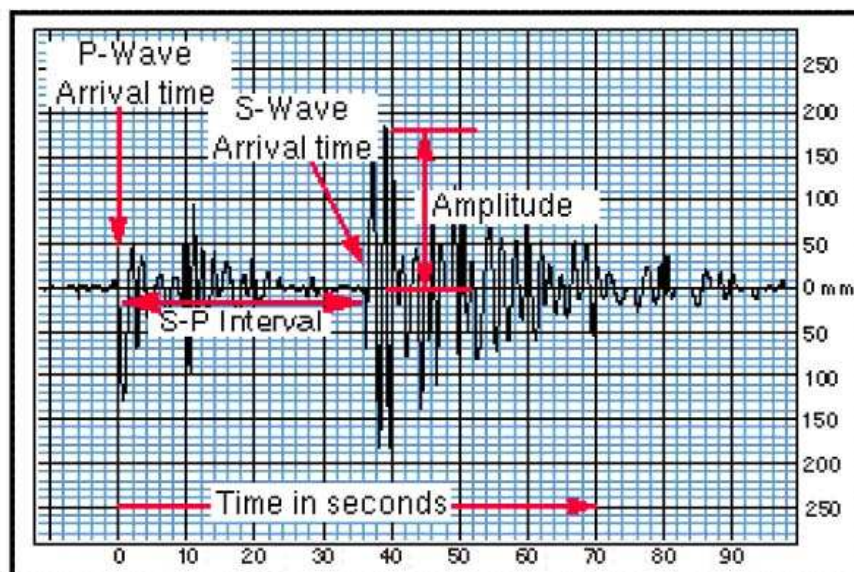
$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ e corresponde a un nivel de 0 decibelios. O umbral de dor corresponde a unha intensidade de 1 W/m^2 ou 120 dB. Como traballamos nunha escala logarítmica, significa que unha intensidade acústica de 10 decibelios corresponde a unha enerxía dez veces maior que unha intensidade de cero decibelios; unha intensidade de 20 dB representa unha enerxía 100 veces maior que a correspondente a 0 decibelios e así sucesivamente.

Escala de Richter.

$$M = \log_{10} A(\text{mm}) + 3 \log_{10}(8\Delta t(\text{s})) - 2.92$$



A magnitude pode medirse coñecendo o tempo entre a aparición das ondas P e as ondas S e a amplitude destas. Na fórmula anterior, A é a amplitude en mm. Das ondas S medidas no sismograma e Δt o tempo en segundos dende o inicio das ondas P ós das ondas S.



Método do Carbono 14.

Para datar restos arqueolóxicos úsase o método do isótopo C-14 (carbono 14), que resolve a anterior ecuación mediante a aplicación de logaritmos, de xeito que, coñecida o período de semidesintegración (tempo que tarda en reducir a súa cantidade inicial á metade) é posible determinar o tempo t.

$$t = [\ln(N_f/N_o)/(-0,693)] \cdot t_{1/2}$$

N_f/N_o é a porcentaxe de carbono-14 na mostra en relación coa cantidade no tecido vivo, e $t_{1/2}$ é o “período” do C14 (5730 anos, é dicir, o período de desintegración á metade do C14).

pH da auga.

O pH ou potencial de Hidróxeno é unha característica da auga, e mídese nunha escala de 1 a 14, polos que dicimos que se ten un pH menor a 7, sería ácida; se fora máis alta que 7 sería auga alcalina ou básica.

Sabemos que por definición o pH é o logaritmo negativo da concentración de ións de Hidróxeno.

$$\text{pH} = -\text{Log} [\text{H}]$$

Cando dicimos que é unha escala logarítmica debemos entender que por exemplo unha auga con pH 5.6 é 10 veces máis alcalina que unha con pH 5.5 e 100 veces máis que unha con pH 5.4.